ある縮退した拡散方程式系の解の漸近的性質 (発展系の差分解法研究会報告集)

三村, 昌泰

数理解析研究所講究録
93巻 1970年 10-20

ある縮退した拡散方程式系の解の漸近的性質

京大・工　　三村昌泰

§1. 序

ここでは次のような縮退した拡散系の初期値問題を半空間 $t>0$ において設定する。

$$(E_1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - d_1 u_1 u_4 - d_2 u_1 u_3 \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - d_3 u_2 u_4 + d_2 u_1 u_3 \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial t} = d_3 u_2 u_4 - d_2 u_1 u_3 \\ \dfrac{\partial u_4}{\partial t} = - d_1 u_1 u_4 - d_3 u_2 u_4 \end{cases} \tag{1}$$

初期条件

$$\begin{cases} u_1(x,0) = u_{10}(x) \geqq 0 \\ u_2(x,0) = u_{20}(x) \geqq 0 \\ u_3(x,0) = 0 \\ u_4(x,0) = 1 \end{cases} \tag{2}$$

ただし、$d_1, d_2\ d_3$はすべて非負とする。

問題(1),(2)式がどのような物理現象を表現しているのか,[2] 又その解の存在,一意性は保証されているかという問題はすでに昨年のこの研究会で報告をしたので今回は問題(1),(2)式の解の漸近挙動とその初期データーにどういう関係が成り立っているかを報告する。しかしここで得られる結果はまだそのための才一段階でしかなく今後の研究が必要であることを記して本論に入る。

§2. 準備

まず最初に次の定理[3]をあげておく。

[定理.1]

初期値問題(1),(2)式に対して非負の初期値 $u_{10}(x), u_{20}(x)$ が $\mathcal{B}^2$クラスに属していれば,非負の解が一意に存在する。

この定理を用いて,(1),(2)式より次の2式を得る。

$$u_4(x,t) = e^{-d_1\int_0^t u_1(x,\tau)d\tau - d_3\int_0^t u_2(x,\tau)d\tau} \tag{3}$$

$$e^{-D\int_0^t u_1(x,\tau)d\tau} \leqq u_3(x,t) + u_4(x,t) \leqq e^{-d\int_0^t u_1(x,\tau)d\tau} \tag{4}$$

ただし $D = \max(d_1, d_2, d_3)$, $d = \min(d_1, d_2, d_3)$

同様に(1)式より

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_1-u_3-u_4)=\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}(u_2+u_3)=\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}$$

を得るから，両式をtに関して積分すれば次式を得る。

$$u_1(x,t)-\left[u_3(x,t)+u_4(x,t)\right]-u_{10}(x)+1=\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2}u_1(x,\tau)d\tau \tag{5}$$

$$u_2(x,t)+u_3(x,t)-u_{20}(x)=\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2}u_2(x,\tau)d\tau \tag{6}$$

又，(E_1)と係数だけ異なり，同じ初期値(2)をもつ次のような系(E_2)，(E_3)を考える。

$$(E_2)\begin{cases}\dfrac{\partial v_1}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}-d v_1 v_4-d v_1 v_3\\[2ex] \dfrac{\partial v_2}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}-d v_2 v_4+d v_1 v_3\\[2ex] \dfrac{\partial v_3}{\partial t}=D v_2 v_4-D v_1 v_3\\[2ex] \dfrac{\partial v_4}{\partial t}=-D v_1 v_4-D v_2 v_4\end{cases} \tag{7}$$

$$(E_3)\begin{cases}\dfrac{\partial w_1}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}-D w_1 w_4-D w_1 w_3\\[2ex] \dfrac{\partial w_2}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}-D w_2 w_4+D w_1 w_3\\[2ex] \dfrac{\partial w_3}{\partial t}=d w_2 w_4-d w_1 w_3\\[2ex] \dfrac{\partial w_4}{\partial t}=-d w_1 w_4-d w_2 w_4\end{cases} \tag{8}$$

§3．ここでは前に準備した(3)〜(8)式を用いて解の漸近挙動を調べる。[1]

(i) $\lim_{t\to\infty} u_3(x,t)$ の考察

(4), (5)式より

$$u_1(x,t) - e^{-dU_1(x,t)} - u_{10}(x) + 1 \leq \frac{\partial^2 U_1(x,t)}{\partial x^2} \leq u_1(x,t) - e^{-DU_1(x,t)} - u_{10}(x) + 1 \qquad (9)$$

ただし
$$U_1(x,t) = \int_0^t u_1(x,\tau)d\tau, \qquad u_1 \in C_x^2.$$

ここで $\lim_{t\to\infty} U_1(x,t) < +\infty$ の場合を考える。この時 $\lim_{t\to\infty} u_1(x,t) = 0$ となるから，(9)式において $t\to\infty$ とすれば，

$$-e^{-dU_1(x)} - u_{10}(x) + 1 \leq \frac{d^2U_1(x)}{dx^2} \leq -e^{-DU_1(x)} - u_{10}(x) + 1 \qquad (10)$$

を得る。ただし $U_1(x) = \int_0^\infty u_1(x,\tau)d\tau$.

こうして点 x において $t\to\infty$ までに反応に参加した $u_1(x,t)$ の量と考えられる $U_1(x)$ は(10)式の微分不等式を満たさなければならないことがわかる。

ここで簡単な初期条件として，$u_{10} \equiv const.$，$u_{20} \equiv const.$ の場合を考えよう。この時 $u_i(x,t)$ $(i=1,2,3,4)$ は x に関して定常となるから，(10)式は簡単な不等式となる。

$$1 - e^{-dU_1} \leq u_{10} \leq 1 - e^{-DU_1} \qquad (11)$$

それ故，次の事がわかる。

。$u_{10} \geqq 1$ であれば，不等式(11)式を満たす $\overline{U}_1$ が存在しない。

。$1 > u_{10} \geqq 0$ であれば，不等式(11)式を満たす $\overline{U}_1$ が存在する。

こうして，$u_{10} \geqq 1$ の時 $\lim_{t\to\infty} \overline{U}_1(t) = \infty$ となることがわかる。X

(3)，(4) 式より

$$e^{-D\overline{U}_1(x,t)} - e^{-d_1\overline{U}_1(x,t) - d_3\overline{U}_2(x,t)} \leqq u_3(x,t) \leqq e^{-d\overline{U}_1(x,t)} - e^{-d_1\overline{U}_1(x,t) - d_3\overline{U}_2(x,t)} \qquad (12)$$

が得られるから，結局 $\lim_{t\to\infty} u_3(x,t) = 0$ が導かれる。

次に初期データーが const. でない場合を考える。

[補助定理1]

同じ初期条件(2)をもつ (E_1)，(E_2)，(E_3) の解 $u(x,t)$，$v(x,t)$，$w(x,t)$ に関して次の不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} &v_1(x,t) \geqq u_1(x,t) \geqq w_1(x,t) \geqq 0 \\ &w_3(x,t) + w_4(x,t) \geqq u_3(x,t) + u_4(x,t) \geqq v_3(x,t) + v_4(x,t) \geqq 0. \end{aligned} \qquad (13)$$

又 (E_2)，(E_3) から次の2つの式をとりだすとこれらの式は独自の系として解くことができる。

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - d(v_4 + v_3)v_1 \\ &\frac{\partial}{\partial t}(v_4 + v_3) = -D(v_4 + v_3)v_1 \end{aligned} \right. \qquad (14)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_1}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - D(w_4 + w_3)w_1 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(w_4 + w_3) = -d(w_4 + w_3)w_1 \end{cases} \tag{15}$$

この時,(14),(15)式は係数だけ異なる同じタイプの系であり,この系に対しては次の補助定理が成り立つ。

[補助定理2]

初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - d'uw \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} = \qquad\quad - d''uw \end{cases}$$

初期条件

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad w(x,0) = w_0(x)$$

を考える時,次の比較定理が成り立つ。

$$\begin{matrix} \tilde{u}_0(x) \geqq u_0(x) \geqq 0 \\ w_0(x) \geqq \tilde{w}_0(x) \geqq 0 \end{matrix} \quad ならば \quad \begin{matrix} \tilde{u}(x,t) \geqq u(x,t) \geqq 0 \\ w(x,t) \geqq \tilde{w}(x,t) \geqq 0 . \end{matrix}$$

(E_1) の系について const. な初期値の場合,$u_{10} \geqq 1$ であれば $\lim_{t\to\infty} U_1(t) = \infty$ となることがわかったが,(E_2),(E_3) の系についても同様な結果が得られる。ie

- $u_{10} \geqq d/D$ であれば $\lim_{t\to\infty} V_1(t) = \infty$ (16)
- $u_{10} \geqq D/d$ であれば $\lim_{t\to\infty} W_1(t) = \infty$

ただし　$V_1(t)=\int_0^t v_1(t)dt$，　$W_1(t)=\int_0^t w_1(t)dt$

そこで $u_{10}(x) \geqq D/d$ の const. でない初期値を考えると，補助定理2の結果より，

$$v_1(x.t)\Big|_{u_{10}(x)} \geqq v_1(t)\Big|_{D/d} \quad , \quad w_1(x.t)\Big|_{u_{10}(x)} \geqq w_1(t)\Big|_{D/d} \qquad (17)$$

がわかり，(16)式より，

$$\lim_{t\to\infty} V_1(x.t)\Big|_{u_{10}(x)} , \quad \lim_{t\to\infty} W_1(x.t)\Big|_{u_{10}(x)} \to \infty$$

が得られる。故に補助定理1の結果より $\lim_{t\to\infty} U_1(x.t)\Big|_{u_{10}(x)} = \infty$ となり，結局，

$u_{10}(x) \geqq D/d$ であれば　$\lim_{t\to\infty} u_3(x.t)=0$ となる。

次はいかなる $u_{10}(x)$ に対して微分不等式(10)式を満たす $U_1(x)$ が存在するかという問題を考える。(10)式をそのまま取り扱うのは困難なのでここでは $d=D=d_0$ という特殊な場合を考える。この時(10)式は次のような非線形常微分方程式となる。

$$\frac{d^2U_1}{dx^2} = -e^{-d_0U_1} - u_{10}(x) + 1 \qquad (18)$$

境界条件としては物理上の要請から次式を考える。

$$\lim_{|x|\to\infty} U_1(x) = 0 \tag{19}$$

この時、次の定理が与えられる。

[定理.2]

$u_{10}(x)$が非負のcompact supp.の函数であれば、境界値問題(18),(19)式は非負の解を唯1つもつ。

d=D a t場合

それゆえ、上の定理より、$u_{10}(x)$がcompact supp.の函数であることは$\lim_{t\to\infty} u_3(x,t) \neq 0$となるための必要条件の一部であることがわかる。

(ii) $\lim_{t\to\infty} u_4(x,t)$の考察

ここでの話は(i)の場合とまったくパラレルに進められる。$\lim_{t\to\infty}(U_1(x,t)+U_2(x,t)) < +\infty$の場合を考える。この時$\lim_{t\to\infty}(u_1(x,t)+u_2(x,t)) = 0$となるから(6),(12)式においてt→∞とすれば、

$$\begin{aligned} e^{-DU_1(x)} - e^{-d_1U_1(x)-d_3U_2(x)} - u_{20}(x) \leqslant \frac{d^2U_2(x)}{dx^2} \leqslant e^{-dU_1(x)} - \\ - e^{-d_1U_1(x)-d_3U_2(x)} - u_{20}(x) \end{aligned} \tag{20}$$

ならびに以前もとめた(10)式

$$-e^{-dU_1(x)} - u_{10}(x) + 1 \leqslant \frac{d^2U_1(x)}{dx^2} \leqslant -e^{-DU_1(x)} - u_{10}(x) + 1 \tag{11}$$

が得られる。　これら2つの式に対して $u_{10}\equiv const.$ $u_{20}\equiv const.$ なる初期値を考えるならば，次のような不等式を得る。

$$e^{-D\bar{U}_1} - e^{-d_1\bar{U}_1 - d_3\bar{U}_2} \leqq u_{20} \leqq e^{-d\bar{U}_1} - e^{-d_1\bar{U}_1 - d_3\bar{U}_2} \qquad (21)$$

$$1 - e^{-d\bar{U}_1} \leqq u_{10} \leqq 1 - e^{-D\bar{U}_1} \qquad (11)$$

それゆえ，$u_{10} \geqq 1$. あるいは，$\overbrace{u_{20} \geqq (1-u_{10})^{d/D}}^{1>u_{10}\geqq 0\ \text{かつ}}$ の場合には，(21)式かつ(11)式を満たす $\bar{U}_1, \bar{U}_2$ は存在しないことがわかる。そこでこの場合には，(3)式より $\lim_{t\to\infty} U_4(x,t) = 0$ を得る。

初期データーが const. でない場合も同様に考えられる。この時も(14),(15)式と同様な次の式を考える。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(v_1+v_2) = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(v_1+v_2) - d(v_1+v_2)v_4 \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial t} v_4 = -D(v_1+v_2)v_4 \end{cases} \qquad (22)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(w_1+w_2) = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(w_1+w_2) - D(w_1+w_2)w_4 \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial t} w_4 = -d(w_1+w_2)w_4 \end{cases} \qquad (23)$$

(22), (23)式に対しては補助定理.2が成り立ち，又補助定理.1に対応する次の補助定理が与えられる。

[補助定理. 3]

同じ初期条件 (2) をもつ (E_1), (E_2), (E_3) の解. $u(x.t)$, $v(x.t)$, $w(x.t)$ に関して次の不等式が成り立つ。

$$v_1(x.t) + v_2(x.t) \geqq u_1(x.t) + u_2(x.t) \geqq w_1(x.t) + w_2(x.t) \geqq 0$$

$$w_4(x.t) \geqq u_4(x.t) \geqq v_4(x.t) \geqq 0$$

(E_3) の場合, (20), (11) 式に対応する式は次のような微分方程式で与えられる。

$$\frac{d^2 W_2(x)}{dx^2} = \frac{D}{d} e^{-dW_1(x)} [1 - e^{-dW_2(x)}] - u_{20}(x) \qquad (24)$$

$$\frac{d^2 W_1(x)}{dx^2} = \frac{D}{d} (1 - e^{-dW_1(x)}) - u_{10}(x) \qquad (25)$$

そこで, この場合, const. な初期値を考えると, $u_{10} \geqq \frac{D}{d}$, あるいは, $D/d > u_{10} \geqq 0$ かつ $u_{20} \geqq \frac{D}{d}(1 - \frac{d}{D} u_{10})$ であれば, $\lim_{t\to\infty}(W_1(t) + W_2(t)) = \infty$ となる。こうして補助定理 2 より, $u_{10}(x) \geqq D/d$, あるいは, $D/d > u_{10}(x) \geqq 0$, かつ $u_{20}(x) + u_{10}(x) \geqq D/d$ であれば, $\lim_{t\to\infty}(W_1(x.t) + W_2(x.t)) = \infty$ となる。そして補助定理 3 から $\lim_{t\to\infty}(U_1(x.t) + U_2(x.t)) = \infty$ となる。結局, (3) 式より. $u_{20}(x) + u_{10}(x) \geqq D/d$ であれば $\lim_{t\to\infty} u_4(x.t) = 0$ となることがわかる。

こうして, 初期条件 (2) 式がいかなる場合に, $\lim_{t\to\infty} u_3(x.t) = 0$

あるいは $\lim_{t\to\infty} u_x(x,t)=0$ となるかという問題は考察されたが，それ以外の場合はまだ判っていない。これらの問題が今後の課題である。

[参考文献]

[1] I.M. Gel'fand : Some Problems in the Theory of the Quasilinear Equations. Uspehi. Mat. Nauk, 14 (1959), no. 2 (86), 87–158.

[2] 三村 : 喘息患者血清中の抗原抗体反応について，応用力学連合会講演論文集 (1969), 39–40.

[3] M. Mimura : On the Cauchy Problem for a Simple Degenerate Diffusion System. the Publ. of R.I.M.S. vol 5. No. 1 (1969) 11–20.